

УДК 537.8

# МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФОТОНОВ И ЭЙКОНАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2010 г. Н. Ф. Шульга<sup>1</sup>, В. В. Сыщенко<sup>2</sup>, С. Н. Шульга<sup>1</sup><sup>1</sup>Институт теоретической физики имени А.И. Ахиезера, ННЦ ХФТИ, Харьков, Украина<sup>2</sup>Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

Поступила в редакцию 10.08.2009 г.

Исследована возможность применения метода эквивалентных фотонов к описанию взаимодействия быстрых заряженных частиц с пространственно-протяженными мишенями.

## ВВЕДЕНИЕ

Метод эквивалентных фотонов [1–4] состоит в том, что кулоновское поле ультрарелятивистской заряженной частицы аппроксимируется пакетом свободных электромагнитных волн. Такая аппроксимация позволяет дать приближенное описание многих электромагнитных процессов, происходящих при взаимодействии быстрых частиц с различными мишенями. Например, процесс тормозного излучения можно описать как процесс комптоновского рассеяния этих эквивалентных фотонов при столкновении с другой заряженной частицей. В [5, 6] метод эквивалентных фотонов был применен к задаче о переходном излучении.

Переходное излучение возникает в результате перестройки поля равномерно движущейся частицы при ее взаимодействии с неоднородностями среды. В [7, 8] был развит приближенный метод описания переходного излучения, аналогичный квазиклассическому приближению в квантовой механике. Однако данный метод применим только к ситуации, когда диэлектрическая проницаемость среды зависит только от одной координаты. В отличие от поля заряженной частицы эволюция поля эквивалентных фотонов в среде описывается свободными уравнениями Максвелла (без зарядов и токов). На основе такого упрощения в [5, 6] был предложен вариант эйконольного приближения, пригодный для описания переходного излучения на мишенях сложной двух- и трехмерной геометрии. Однако пакет эквивалентных волн, аппроксимирующих кулоновское поле частицы, эволюционирует со временем. Поэтому применение метода эквивалентных фотонов к описанию взаимодействия частицы с протяженной мишенью нуждается в дополнительном обосновании. В настоящей работе определяется время, в течение которого волновой пакет, совпадающий по форме с кулоновским полем в начальный момент времени, будет оставаться достаточно хорошей аппроксимацией этого поля.

## МЕТОДИКА

Скалярный потенциал поля заряда  $e$ , равномерно движущегося со скоростью  $\mathbf{v}$ , описывается уравнением [9]:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (1)$$

Его решение имеет вид

$$\varphi^{(c)}(\mathbf{r},t) = \frac{e}{\sqrt{(z - vt)^2 + \rho^2/\gamma^2}}, \quad (2)$$

где  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — лоренц-фактор частицы, ось  $z$  направлена вдоль скорости  $\mathbf{v}$ . Эквипотенциальные поверхности, таким образом, имеют вид эллипсоидов, сплюснутых в  $\gamma$  раз в направлении движения. Векторный потенциал равномерно движущейся частицы связан со скалярным:

$$\mathbf{A}^{(c)}(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{v}}{c} \varphi^{(c)}(\mathbf{r},t),$$

поэтому кулоновское электрическое поле может быть выражено как

$$\mathbf{E}^{(c)}(\mathbf{r},t) = -\left(\nabla_{\perp} + \frac{\mathbf{v}}{v\gamma^2} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi^{(c)}(\mathbf{r},t).$$

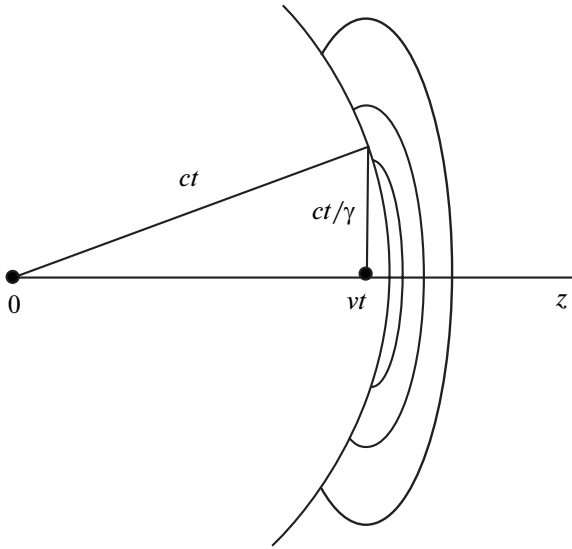
Потенциал (2) можно представить в виде временного интеграла Фурье:

$$\varphi^{(c)}(\mathbf{r},t) = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} K_0\left(\frac{\rho|\omega|}{v\gamma}\right) \exp\left\{i\frac{\omega}{v}z - i\omega t\right\} d\omega \quad (3a)$$

(где  $K_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя третьего рода) или пространственного интеграла Фурье

$$\varphi^{(c)}(\mathbf{r},t) = \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{\exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\mathbf{k}\mathbf{v}t\}}{k_{\perp}^2 + k_z^2/\gamma^2} d^3k. \quad (3b)$$

Из этого соотношения видно, что характерные значения продольной компоненты волнового вектора, вносящие существенный вклад в интеграл, намного



Эквипотенциальные поверхности потенциала (10).

превышают характерные значения поперечной компоненты

$$(k_z)_{\text{eff}} \sim \gamma(k_{\perp})_{\text{eff}}. \quad (4a)$$

Оценка (4) для компонент волнового вектора эквивалентна оценке эффективных значений продольных и поперечных расстояний в конфигурационном пространстве

$$(\rho)_{\text{eff}} \sim \gamma(z - vt)_{\text{eff}}, \quad (4b)$$

вытекающей непосредственно из (2).

Пакет эквивалентных фотонов, аппроксимирующий кулоновское поле частицы, должен, очевидно, удовлетворять свободному волновому уравнению

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

откуда следует, что он должен иметь вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{k}) \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - ikct\} d^3k, \quad (6)$$

где коэффициенты фурье-разложения  $f(\mathbf{k})$  определяются из условия совпадения в начальный момент времени пакета (6) с кулоновским полем (36). Таким образом,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{\exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - ikct\}}{k_{\perp}^2 + k_z^2/\gamma^2} d^3k. \quad (7)$$

Чтобы подчеркнуть распространение пакета вперед (т.е. в положительном направлении оси  $z$ ), формулу (7) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\pi^2} \text{Re} \int \exp\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - ikct\} \frac{\theta(k_z)}{k_{\perp}^2 + k_z^2/\gamma^2} d^3k, \quad (8)$$

где  $\theta(x)$  — ступенчатая функция Хевисайда ( $\theta(x) = 1$  при  $x \geq 0$  и  $\theta(x) = 0$  при  $x < 0$ ). Отметим, что потенциал (8) приводит к напряженности электрического поля именно в таком виде, какой был использован (исходя из других соображений) в [5, 6] при построе-

нии эйконального приближения в теории переходного излучения.

Вычисление интеграла (8) дает возможность исследовать эволюцию пакета эквивалентных волн при  $t > 0$  в конфигурационном пространстве. При этом оценка (4a) позволяет выполнить разложение в степенной ряд в показателе экспоненты

$$k = \sqrt{k_z^2 + k_{\perp}^2} \approx k_z + \frac{k_{\perp}^2}{2k_z},$$

и тогда

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{e}{\pi^2} \text{Re} \int \exp\left\{i\mathbf{k}\mathbf{r} - ik_z ct - i \frac{k_{\perp}^2}{2k_z} ct\right\} \times \times \frac{\theta(k_z)}{k_{\perp}^2 + k_z^2/\gamma^2} d^3k. \quad (9)$$

Пренебрежение поправочным членом в показателе экспоненты (9) приведет к потенциалу вида

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\sqrt{(z - ct)^2 + \rho^2/\gamma^2}},$$

отличающемся от кулоновского потенциала (2) только скоростью смещения вдоль оси  $z$ . С учетом же поправки потенциал, создаваемый волновым пакетом, будет иметь вид:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\sqrt{(z - vt)^2 + \rho^2/\gamma^2}} \theta\left(z - ct + \frac{\rho^2}{2ct}\right). \quad (10)$$

В области пространства, где аргумент  $\theta$ -функции положителен, потенциал (10) совпадает с кулоновским потенциалом (2), а в области, где аргумент  $\theta$ -функции отрицателен, потенциал (10) равен нулю (рисунок). Граница, разделяющая эти две области в фиксированный момент времени, имеет форму параболоида, описываемого уравнением

$$z - ct + \frac{\rho^2}{2ct} = 0. \quad (11)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Уравнение (11) может быть переписано:

$$z^2 + \rho^2 = c^2 t^2 + \frac{\rho^4}{4c^2 t^2};$$

при малых значениях поперечной координаты оно имеет вид сферического фронта, распространяющегося из начала координат со скоростью  $c$ . Такое поведение потенциала (10) допускает наглядную интерпретацию: переход в момент времени  $t = 0$  от уравнения (1), описывающего поле равномерно движущейся заряженной частицы, к свободному волновому уравнению (5) эквивалентен исчезновению заряда в начале координат. Впереди сферического фронта, куда еще не дошла информация об исчезновении, сохраняется кулоновский потенциал, движущийся со скоростью  $v$ , а позади фронта потенциал отсутствует. Отличие формы этого фрон-

та в (10) от сферической обусловлено сделанным при выводе (10) приближением.

Потенциалы в форме “усеченного” кулоновского, подобные (10), возникают во многих задачах, описывающих излучение заряженных частиц. Например, в [10] рассматривалось излучение, возникающее при резком изменении траектории частицы, в [11] — переходное излучение на проводящем диске конечного радиуса, а в [12, 13] — дифракционное излучение, возникающее при пролете частицы вблизи проводящего экрана. Реальность существования таких усеченных потенциалов была продемонстрирована в недавнем эксперименте [13].

Для нахождения спектрально-угловой плотности переходного излучения [5, 6] требуется выделить из пакета волн составляющую, отвечающую заданной частоте  $\omega$ . Из (3а) видно, что характерные поперечные расстояния, соответствующие этой частоте, имеют порядок  $\rho \leq c\gamma/\omega$ . Как видно из рисунка, наш сферический фронт эффективно обрежет потенциал на таких расстояниях к моменту времени  $t \sim \gamma^2/\omega$ , когда частица, поле которой аппроксимируется вышеописанным пакетом, пройдет расстояние  $l = vt \sim c\gamma^2/\omega$ . С другой стороны, характерное расстояние, на котором формируется излучение ультрарелятивистской частицы (длина когерентности [7, 10]) составляет  $l_{\text{coh}} \sim 2c\gamma^2/\omega$ . Таким образом, при описании взаимодействия частицы с мишенями, протяженность которых в направлении импульса частицы много меньше длины когерентности, пакет эквивалентных фотонов будет хорошей аппроксимацией поля частицы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные оценки показывают, что метод эквивалентных фотонов может быть использован не

только для описания взаимодействия заряженной частицы с другими точечными частицами, но и для описания взаимодействия частицы с умеренно-протяженными мишенями, толщина которых в направлении движения частицы мала по сравнению с длиной когерентности.

Работа выполнена при поддержке внутриуниверситетского гранта БелГУ.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fermi E.* // *Z. Phys.* 1924. V. 29. P. 315.
2. *Weizsacker C.* // *Z. Phys.* 1934. V. 88. P. 612.
3. *Williams E.J.* // *Dan. Vid. Selsk. Mat. Phys. Medd.* 1935. V. 13. P. 4.
4. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
5. *Шульга Н.Ф., Сыщенко В.В., Сыщенко В.Г.* // *Вісник Харківського університету.* 2004. № 628. С. 35.
6. *Шульга Н.Ф., Сыщенко В.В.* // *Поверхность.* 2007. Рентген., синхротр. и нейтрон. исслед. № 4. С. 49.
7. *Тер-Микаелян М.Л.* Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван: Изд-во АН Арм.ССР, 1969. 457 с.
8. *Lepore J.V., Riddell R.J., Jr.* // *Phys. Rev. D.* 1976. V. 13. № 8. P. 2300.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 504 с.
10. *Ахизер А.И., Шульга Н.Ф.* Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: Наука, 1993. 344 с.
11. *Шульга Н.Ф., Добровольский С.Н.* // *ЖЭТФ.* Т. 117. С. 668.
12. *Болотовский Б.М.* // Ионизационные эффекты и переходное излучение релятивистских заряженных частиц (Труды ФИАН; Т. 140). М.: Наука, 1982. С. 95.
13. *Naumenko G., Artru X., Potylitsyn A. et al.* // *arXiv:0901.2630*

## Equivalent Photon Method and the Eikonal Approximation in the Transition Radiation Theory

N.F. Shul'ga, V.V. Syshchenko, and S.N. Shul'ga

The possibility of application of the equivalent photons method for description of the interaction of fast charged particles with spatially extended targets is examined.